

一类非线性系统的单尺度小波框架 网络自适应观测器

魏 荣, 王行愚

(华东理工大学信息学院, 上海 200237)

摘 要: 本文提出了一类 MIMO 非线性系统的小波网络自适应观测器设计方法, 可对一类非线性未知或具有不确定性的非仿射系统进行状态估计. 文中给出了小波网络参数的在线自适应调节律, 从理论上分析了观测器增益矩阵的选择对状态估计误差的影响. 根据 Lyapunov 理论证明了整个自适应观测器的稳定性, 仿真试验表明了该方法的有效性.

关键词: 非线性系统; 单尺度小波框架; 自适应; 状态观测器; 参数估计

中图分类号: TP27 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 07-1122-04

A Single-Scaling Wavelet Frame Network-Based Adaptive Observer for a Class of Nonlinear Systems

WEI Rong, WANG Xingyu

(School of Information, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

Abstract: This paper proposed a new method of designing a single-scaling wavelet frame network-based adaptive observer for a class of MIMO nonlinear systems, which can estimate the states of a class of non-affine systems with uncertainties or unknown nonlinearities. The wavelet network weights are tuned online, with no offline learning required. The robustifying term in the observer can reduce the error brought by the wavelet network approximation greatly. The overall adaptive scheme is shown to be uniformly ultimately bounded. Simulation results have verified the performance of the observer proposed.

Key words: nonlinear system; single-scaling wavelet frame; adaptive; state observer; parameter estimation

1 引言

由于状态反馈控制广泛应用于系统的设计之中, 这使得状态观测器的设计成为系统控制理论中一个十分重要的环节. 自从 Luenberger 关于观测器理论的讨论^[1], 线性系统的观测器设计及应用已日趋成熟. 由于实际控制系统不可避免地存在不同程度的非线性特性, 因而非线性系统观测器问题也得到了广泛的研究^[2~5]. 然而, 由于非线性系统本身的复杂性, 往往需要针对不同的对象, 采用不同的设计方法. 到目前为止, 设计非线性系统观测器比较常用的方法为: 扩展卡尔曼滤波 (EKF)^[4, 5]、自适应观测器^[6]和变结构法^[7]等. 在有关这些研究的文献中, 大多针对一些比较特殊的系统, 如系统对控制是仿射的, 系统是单输入单输出系统等. 本文对一类非线性特性不完全已知或具有不确定性的更一般的多输入多输出非线性系统, 提出了基于小波网络的自适应观测器设计方法, 理论分析证明了整个自适应观测器是稳定的, 最后的仿真研究表明了该方法的有效性.

2 单尺度小波框架网络

定理 1 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\{W_{j1j}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的一个框架, 框架界为 A 和 B , $\{W_{j1j}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的另一框架, 且框架界为 B^{-1} 和 A^{-1} , $B^{-1} + f + 2F \sum_{j1j} |3f, W_{j1j}|^2 F A^{-1} + f + 2$, 那么称 $\{W_{j1j}\}$ 是 $\{W_{j1j}\}$ 的对偶框架, 且有下式成立:

$$f = \sum_{j1j} 3f, W_{j1j} = \sum_{j1j} 3f, W_{j1j} = \sum_{l,k} c_{l,k} W(2^{-l}x - k) \quad (1)$$

上述定理的证明完全类似 Daubechies 在文献[8]中的证明, 因此在这里略去.

记 $W(x) = W_{k,k}(x)$, 那么由式(1)可得, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 可近似地表示为:

$$f \approx \sum_{i=1}^L 3f, W_{j1j} > \sum_{i=1}^L c_i W(x) \quad (2)$$

其中 L 是一正整数.

式(2)可用三层神经网络来实现, 网络输入为 d 维向量 $x \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 输入层是直通节点, 隐层有 L 个小波基函数 $W(x)$

(1[i[L), 输出层是线性节点. 可以证明具有任意数目隐单元的单尺度小波框架网络(2) 可以按 L^2 范数逼近紧集上的平方可积函数.

3 基于小波网络的自适应观测器设计

3.1 具有标准形的 MIMO 非线性系统的小波网络观测器设计

考虑一类具有如下状态空间表达式的 MIMO 非线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= Ax + B[f(x, u) + d(t)] \\ y &= C^T x\end{aligned}\quad (3)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量, $u \in \mathbb{R}^m$ 为系统的输入, $y \in \mathbb{R}^p$ 为系统的输出, A, B, C 分别是相应空间中的紧集, 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 是已知的定常矩阵, 具有以下形式: $A = \text{blockdiag}[A_1, \dots, A_p]$, $B = \text{blockdiag}[b_1, \dots, b_p]$, $C^T = \text{blockdiag}[c_1^T, \dots, c_p^T]$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s & s & s & \dots & w & s \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n_i \times 1}, \quad c_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{n_i \times 1}$$

其中 $i = 1, \dots, p$, $n = \sum_{i=1}^p n_i$. $f(x, u): X \times U \rightarrow \mathbb{R}^p$ 为未知的 L^2 光滑向量函数, 包含了系统的未知非线性和不确定性, $d(t) \in \mathbb{R}^p$ 是有界扰动, 设 $d(t) + F b_d$. 系统仅输入 u 和输出 y 可直接测量.

对系统(3) 设计状态观测器如下:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B[f(\hat{x}, u) - v(t)] + L(y - C^T \hat{x}) \\ \hat{y} &= C^T \hat{x}\end{aligned}\quad (4)$$

其中 $\hat{x}$ 表示估计状态, $\hat{y}$ 为观测器的输出, $v(t)$ 是鲁棒项, 为了减小扰动和小波网络重构误差对状态估计的影响. L 是观测器增益常数矩阵: $L = \text{blockdiag}[l_1, \dots, l_p]$, $l_i = [l_1^i, \dots, l_{n_i}^i]^T$, 使得矩阵 $A - LC^T$ 的特征多项式是严格的 Hurwitz 多项式.

因为单尺度小波框架网络(2) 可以按 L^2 范数逼近紧集上的平方可积函数, 所以对一给定的精度 $\epsilon_k > 0$, 一定存在一个小波网络在紧集 $S_x \times S_u$ 上以精度 ϵ_k 逼近 $f(x, u)$. 假设模型结构已经事先确定, 具有 M 个隐节点, 对 $P(x, u) \in X \times U$ 则有

$$f(x, u) = W^T g(x, u) + E(x, u) \quad (5)$$

其中 $E(x, u)$ 为建模误差, 设 $E + \frac{1}{2} F E_N$, W 为理想权系数矩阵, 设 $W + F F W_M$, $g(x, u)$ 为单尺度小波框架构成的函数向量, 设小波网络对 $f(\hat{x}, u)$ 估计为: $f(\hat{x}, u) = W^T g(\hat{x}, u)$, 其中 W 是由算法调节的估计权值. 则状态观测器(4) 可写为:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC^T) \hat{x} + B[W^T g(\hat{x}, u) - v(t)] \\ \hat{y} &= C^T \hat{x}\end{aligned}\quad (6)$$

记 $x = x - \hat{x}$, $y = y - \hat{y}$, $W = W - W_M$, $\hat{g} = g(\hat{x}, u)$, $g(x, \hat{x}, u) = g - \hat{g}$, 则状态误差动态方程为:

$$\dot{x} = (A - LC^T)x + B[W^T \hat{g} + W^T g + d(t) + E + v(t)] \quad (7)$$

$$y = C^T x$$

设 $w(t) = W^T g(x, \hat{x}, u) = W^T [g(x, u) - g(\hat{x}, u)]$, 因为小波函数及导数是有界的, 由中值定理可得, $w(t) + F B + x + B > 0$.

对于状态观测器(6), 取权值调节律和鲁棒项为:

$$v(t) = -k_y y + y + 2 \quad (8)$$

$$\dot{W} = \# \hat{g} y^T - D + y + 2 \# W \quad (9)$$

其中 $k_y \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\#$ 是一对称正定矩阵, 常数 $D > 0$.

定理 2 对于基于小波网络模型的状态观测器(6), 如果它的权系数调节律和鲁棒项由(8)和(9)给出, 则状态估计误差 x 和小波网络权系数的估计误差 W 是一致有界的.

证明 因为线性传递函数 $H(s) = \text{blockdiag}[h_1(s), \dots, h_p(s)]$, 所以存在一正定对称矩阵 $P = \text{blockdiag}[P_1, \dots, P_p]$, 对 $Q = Q^T = \text{blockdiag}[Q_1, \dots, Q_p] > 0$ 使得:

$$(A - LC^T)^T P + P(A - LC^T) = -Q, PB = C \quad (10)$$

构造 Lyapunov 函数 V :

$$V = \frac{1}{2} x^T P x + \frac{1}{2} \text{tr}(W^T \#^{-1} W) \quad (11)$$

则 Lyapunov 函数 V 的时间导数 $\dot{V}$ 为:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (x^T P x + x^T P x) + \text{tr}(W^T \#^{-1} \dot{W}) \quad (12)$$

将式(7), (9), (12)和(10)代入式(12):

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\frac{1}{2} x^T Q x + y^T (E + d + w) - k_y y + y + 2 \\ &\quad + D + y + 2 \text{tr}(W^T \dot{W})\end{aligned}\quad (13)$$

因为:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} x^T Q x &- \frac{1}{2} K_{\min}(Q) \|x\|^2 + x^T F - \frac{K_{\min}(Q)}{2 + C + \frac{1}{F}} \|x\|^2 + y + \frac{1}{2} \\ &\quad + \text{tr}(W^T \dot{W}) F + W + F + W + F - \|W\|^2 + F\end{aligned}\quad (14)$$

$$F W_M + W + F - \|W\|^2 + F \quad (15)$$

$$y^T (w + E + d) - k_y y + y + 2 F B + y + \frac{1}{2} \quad (16)$$

其中, $K_{\min}(Q)$ 为 Q 的最小特征值. 所以:

$$\begin{aligned}\dot{V} &F - \|y\|^2 + 2 \left[\left(\frac{K_{\min}(Q)}{2 + C + \frac{1}{F}} + B \right) + y + 2 \right. \\ &\quad \left. + D + W + F - \frac{W_M}{2} \right]^2 - \frac{DW_M^2}{4}\end{aligned}\quad (17)$$

显然, 当: $\|y\| + y + 2 > \frac{DW_M^2 + C + \frac{1}{F}}{2K_{\min}(Q) + 4B + C + \frac{1}{F}}$ 或 $\|W\| + F > W_M$ 时, $\dot{V} < 0$, 即 $\|y\|$ 和 $\|W\|$ 是一致最终有界的.

又系统(7)的解可写为:

$$x(t) = T_X(0) + \int_0^t T_X(S) Bu(S) dS \quad (18)$$

其中 $u = W^T \hat{g} + w + v + d + E + T_X + F M \exp(X)$, 其中 $M \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $X < 0$, 对所有 $t > 0$ 均成立.

对解式(18)取 2 范数, 可得如下不等式:

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &+ F M \exp(X) [\|x(0)\| + \\ &\quad + \|B\| + \int_0^t \exp(-XS) \|u + d\| dS]\end{aligned}\quad (19)$$

设 $\hat{g}(x, u) + F k_E$, 则 $\dot{x} = g(x, u) - g(\hat{x}, u) + F 2k_E + u + F k_E$, 其中

$$k_E = k_g(2W_M + k_W) + k_v + E_N + b_d \quad (20)$$

k_W 是可以计算的正常数。所以, $\dot{x}(t) +$ 是一致最终有界的, 即状态估计误差 $x(t)$ 是一致最终有界的。

3.1.2 增益矩阵 L 的选择及其对状态估计误差影响的分析

由式(19)可以看到, 只要选择增益矩阵 L 使得矩阵 $A_0 = A - LC^T$ 的特征值全在左半开平面, 则状态估计误差就是一致最终有界的, 按指数衰减到一误差界。下面的分析表明, 通过选择合适的观测器增益矩阵 L , 可以使估计误差界任意的小。这非常类似鲁棒观测器的设计^[9], 因此我们在这里借用鲁棒控制理论中的一些概念。

定理 3 如果自适应状态观测器(6)的权系数调节律和鲁棒项由式(8)和(9)给出, 且选取观测器增益矩阵 L , 满足下式

$$K_{\max}[(A + A^T) - (LC^T + CL^T)] = -2 \frac{k_E + B +}{x_m +} \quad (21)$$

其中 $K_{\max}[\#]$ 表示矩阵的最大特征值, 即观测误差系统矩阵 $(A - LC^T)$ 具有鲁棒度 $Q = \frac{k_E + B +}{x_m +}$, 则自适应状态观测器(6)是渐近稳定的, 状态估计误差 $x(t)$ 满足: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) + F + x_m +$, 且其中 x_m 是期望的最终偏差允许范围, k_E 的定义在式(20)中。

证明 不等式(19)可重新写为:

$$\dot{x}(t) + e^{-x} F M + x(0) + \int_0^t \frac{[M + x(S) + e^{-x} B + u +]}{x(S) +} dS \quad (22)$$

由定理 2 可知, 状态估计误差 $x(t)$ 和权值估计误差 W 是一致最终有界的, 所以式(22)可写为

$$x(t) + F M + x(0) + \exp\left[\int_0^t \left(X + \frac{M + B + k_E}{x(S) +}\right) dS\right] \quad (23)$$

$$\text{令 } J(t) = X + \frac{M + B + k_E}{x(t) +},$$

$$\text{则 } J(t) = M + B + k_E \left[\frac{1}{x(t) +} - \frac{1}{x_m +} \right],$$

$$\text{所以, } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) + F + x_m +.$$

上面的定理表明, 具有自适应律(8)和(9)的状态观测器(6)是渐近稳定的, 可以通过适当选择观测器增益矩阵 L , 使观测误差系统矩阵 $(A - LC^T)$ 具有鲁棒度 $Q = \frac{k_E + B +}{x_m +}$, 则实际估计误差一定在所期望的范围内。

3.1.3 小波网络自适应观测器设计方法的一般化

定理 2 给出了一类具有可控可观标准形的特殊的非线性系统的小波网络自适应观测器的设计, 这里将该方法推广到更一般的非线性系统。

考虑 MIMO 非线性系统动态方程为:

$$\dot{\hat{x}} = Ax + B[f(x, u) + d(t)] \quad (24)$$

$$y = Cx$$

其中变量定义如系统(1)。

对系统(24)设计状态观测器如下:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + B[f(\hat{x}, u) - v(t)] + Ly \quad (25)$$

$$\dot{y} = C\hat{x}$$

其中, L 是观测器增益常数矩阵, 使得矩阵 $A - LC$ 的特征多项式是严格的 Hurwitz 多项式, $\hat{x}$ 表示估计状态, $\hat{y}$ 为观测器的输出, $v(t)$ 是鲁棒项, 为了减小扰动和小波网络重构误差对状态估计的影响。

假设系统(24)和观测器(25)满足以下条件:

(1) 矩阵对 (A, C) 是可观的, $(A - LC, B)$ 是可控的;

(2) 矩阵 B 和 C 是满秩的, 且 $q \in p$, $\text{rank}(CB) = p$ 。

则系统(24)的小波网络自适应观测器为:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + B[W^T g(\hat{x}, u) - v(t)] \quad (26)$$

$$\dot{y} = C\hat{x}$$

记 $x = x - \hat{x}$, $y = y - \hat{y}$, $W = W - \hat{W}$, $\hat{g} = g(\hat{x}, u)$, $g(x, \hat{x}, u) = g - \hat{g}$, 则状态误差动态方程为:

$$\dot{x} = (A - LC)x + B[W^T \hat{g} + \hat{W}^T g + d(t) + E + v(t)] \quad (27)$$

$$y = Cx$$

取鲁棒项 $v(t)$ 和权值估计 $\hat{W}$ 的自适应调节律如下:

$$v(t) = \frac{-k_F F^T y}{y + y_2 + F + F} \quad (28)$$

$$\dot{\hat{W}} = \# \hat{g} y^T F - D + y + y_2 \# W \quad (29)$$

其中, $k_F E b_d + E_N$, $\#$ 是一对称正定矩阵, 常数 $D > 0$, 矩阵 F 和 $I \in R^{q \times p}$ 是下列矩阵方程组的解:

$$\begin{cases} P(A - LC) + (A - LC)^T P = -Q \\ PB = C^T F \end{cases} \quad (30)$$

下述的定理给出了矩阵 F 存在的充要条件。

定理 4 若系统(24)和观测器(25)满足假设条件(1)和(2), 设矩阵 $S \in R^{q \times p}$ 是矩阵 $B^T P$ 的满秩的右零化矩阵, 即 $B^T PS = 0$, 则当且仅当 $\text{rank}(CS) = q - p$ 时, 矩阵方程组(30)的解 F 存在。

证明 充分性。因为 $\text{rank}(CS) = q - p$, 设 $F(CS) = 0$, $\text{rank}(F) = p$, 所以 $\text{rank}(FC) \leq p$, 由 Sylvester 不等式有: $\text{rank}(FC) \leq \text{rank}(F) + \text{rank}(C) - q = p + q - q = p$ 。因此, $\text{rank}(FC) = p$, 即 FC 是 S 的满秩的左零化矩阵。令 $B^T P = FC$, 则 $F = F^T$ 。

必要性。因为 $PB = C^T F$, 矩阵 PB 和 C 是满秩的, 所以, 矩阵 F 也是满秩, 由假设条件可知, $n \in q \in p$, 则 $\text{rank}(F) = p$ 。又因为 $F^T(CS) = 0$, $F^T I \in R^{p \times q}$, $CS \in R^{q \times (n-p)}$, 则可得: $\text{rank}(CS) \leq \text{rank}(F^T) = q - p$ 。另有不等式: $\text{rank}(CS) \leq \text{rank}(C) + \text{rank}(S) - n = q + n - p - n = q - p$ 。因此, 有 $\text{rank}(CS) = q - p$ 。

定理 5 若系统(25)和小波网络状态观测器(26)满足所有的假设条件, 且观测器的权系数调节律和鲁棒项由式(27)和(28)给出, 则状态估计误差 x 和小波网络权系数的估计误差 W 是一致有界的。

证明略。

4 仿真研究

考虑一非线性系统, 其状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (2u - 10\sin x_1) \\ y = \hat{x}_1 \end{cases} \quad (31)$$

系统的输入 $u = \sin 2t$, 系统的状态观测器由式(6)给出. 根据定理3设定参数如下: 矩阵 $\# = 50 * I_{18}$, 其中 I 表示单位矩阵, 选择观测器增益矩阵 $L = [20, 9]^T$, 使得矩阵 $A_0 = A - LC$ 的特征值为 -10 和 -11 , $D = 310$, 系统在初始时刻的状态 $x(0) = [0, 0]^T$, 小波状态观测器的初始估计状态 $\hat{x}(0) = [1, 1]^T$. 小波网络的隐节点个数取18, 权值的初始估计为: $W(0) = 0$, 鲁棒项中的 $k_v = 310$.

为了比较, 对同样的系统, 同样的参数和小波网络, 图1中画出了没有鲁棒项的小波网络状态观测器的状态估计误差, 用虚线表示. 从图中可以看到, 鲁棒项的增加使得状态估计的误差界明显地减小了. 以上所有仿真均在 MATLAB 环境下完成. 从上面的仿真可以看到, 本文给出的小波网络自适应状态观测器是有效的.

5 结论

本文给出了一类非线性系统的小波网络自适应观测器, 可以实现对一类非线性未知或具有不确定性的系统的状态估计. 通过小波网络对系统中非线性部分的逼近, 可以放宽大部分自适应律需要系统非线性是精确已知或可参数线性化的要求. 网络的权值可直接在线调节, 不需要离线训练或一个学习过程, 对网络参数初值的选择也没有限制. 通过选择合适的增

益矩阵和鲁棒项可以使得误差收敛到期望的精度内, 不需要持续激励的条件. 稳定性的证明表明了状态估计误差和参数估计误差是一致最终有界, 最后的仿真结果显示了该方法的有效性.

参考文献:

- [1] D G Luenberger. An introduction to observers[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1971, 16(1): 190-197.
- [2] J P Gauthier, I A Kupka. Observability and observers for nonlinear systems[J]. SIAM J. Control and Optimization, 1994, 32(4): 975-994.
- [3] S Raghavan, J K Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems[J]. INT J Control, 1994, 59(2): 515-528.
- [4] K Rief, R Unbehauen. The extended Kalman filter as an exponential observer for nonlinear systems[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1999, 47(8): 2324-2328.
- [5] K Rief, F Sonnenmann, R Unbehauen. An EKF2based nonlinear observer with a prescribed degree of stability[J]. Automatica, 1998, 34(9): 1119-1123.
- [6] Y H Kim, F L Lewis, C T Abdallah. A dynamic recurrent neural network based adaptive observer for a class of nonlinear systems[J]. Automatica, 1997, 33(8): 1539-1543.
- [7] I Daubechies. Ten lectures on wavelets[A]. CBMS/NSF regional series in applied mathematics[C]. Montpelier, Vermont: Capital City Press, 1992.
- [8] 褚健, 俞立, 苏宏业. 鲁棒控制理论及应用[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2000.

作者简介:

魏 荣 女, 1975 年 9 月出生于安徽马鞍山, 1997 年获南京理工大学工学学士学位, 2002 年获南京理工大学控制理论与控制工程专业博士学位, 现为华东理工大学信息学院自动化系博士后, 主要从事信号处理、小波分析理论及其在控制领域中应用研究.

王行愚 男, 1944 年出生于上海, 1967 年毕业于复旦大学数学系, 1982 年获华东师范大学数学系控制论专业硕士学位, 1984 年 11 月获华东化工学院自控系工业自动化专业博士学位. 现为华东理工大学校长, 教授、博士生导师, 主要从事智能控制、网络控制、信息理论等研究.